I sassolini di Pitagora

Tutto è numero e la matematica regola l'intero universo: questi erano i presupposti dei pitagorici. Ma la scoperta di quantità geometriche che non hanno una misura sconvolse il loro punto di vista. E aprì le strade alla scienza moderna

Qualche tempo fa chiacchieravo di matematica con una ragazza, che mi confessò di essere da tempo tormentata da un problema: trovare l'ipotenusa di un triangolo rettangolo con i cateti che misurano 2 e 5.
La giovane, che non si era più occupata di matematica da quando si era diplomata in un istituto superiore, aveva provato ad applicare il teorema di Pitagora, ma... temeva di non ricordarlo bene, perché l'ipotenusa risultava pari a $\sqrt{29}$! Che razza di numero è $\sqrt{29}$ si chiedeva la ragazza?
La risposta avrebbe certo meritato un tempo molto più lungo di quello a disposizione in quel momento, ma l'episodio mi fece riflettere ancora una volta su quanto siano «irrazionali» i numeri irrazionali e come spesso non rimanga alcuna traccia del loro grandissimo valore culturale sui giovani studenti che pure passano un anno intero a fare complicati esercizi sui radicali.

Pitagora come appare in un particolare de *La Scuola di Atene* di Raffaello.

Il creatore di tutto

Tutti crediamo di sapere che cos'è un numero, ma il solo concetto di numero naturale è talmente astratto che la mente umana lo ha fatto proprio dopo una lunga evoluzione. Se proviamo ad affrontare seriamente la questione, difficilmente troveremo le parole giuste per spiegare il concetto di numero, a meno di non ricorrere a definizioni specialistiche.
Fu probabilmente nel sesto secolo a.C., con la scuola pitagorica, che i numeri ebbero definitivamente una loro vita astratta, separata dagli oggetti fisici. Non rimane alcun frammento né alcuna notizia di opere scritte da Pitagora, ma molte testimonianze di pochi anni successive lo descrivono come il creatore della matematica pura.
Per Pitagora l'uno, inteso come punto, era il generatore di tutto. Tutte le cose erano fatte di numeri-punti, quasi come i nostri atomi; la loro essenza era spiegabile in termine di numeri interi o dei loro rapporti. Ogni numero aveva poi un significato particolare; per esempio, sacro era il numero dieci, la *tetractys*, che rappresentava l'universo, perché 1+2+3+4=10, dove 1 rappresenta il punto, generatore delle dimensioni, 2 la retta, 3 il piano e 4 lo spazio.

Punti da spiaggia

I numeri venivano rappresentati mediante punti sulla sabbia o sassolini che, disposti in modi diversi, davano origine a varie figure geometriche: c'erano i numeri triangolari, i numeri quadrati, i numeri pentagonali, e così via. Dalla loro disposizione geometrica risultavano evidenti alcune importanti proprietà, oggi entrate a far parte della teoria dei numeri. La geometria e l'aritmetica venivano così a fondersi e, per avere l'idea di segmento, bastava mettere in fila tanti sassolini attaccati l'uno all'altro, tutti rigorosamente uguali.
Possiamo allora pensare che i discepoli della scuola pitagorica, che numerosi seguivano il Maestro tra Crotone e Metaponto per ascoltare i suoi meravigliosi insegnamenti sull'armonia dei rapporti musicali, sull'astronomia, sulla filosofia e anche sui comportamenti nella vita pratica, avranno guardato con curiosità un triangolo avente per lati 3, 4 e 5 sassolini: era un perfetto triangolo rettangolo. O anche 5, 12, 13 sassolini, o 7, 24, 25..., che formavano altrettanti triangoli rettangoli.
Potevano così facilmente verificare che $3^2+4^2=5^2$ e $5^2+12^2=13^2$ e $7^2+24^2=25^2$.
Ma talvolta succedeva qualcosa di strano. Per esempio, se costruivano un angolo retto con 2 e 5 sassolini come lati, per l'altro lato 5 sassolini erano troppo pochi, ma 6 erano troppi, per quanto piccoli essi fos-

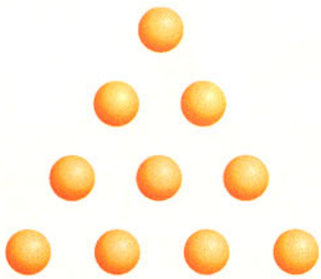
FATELO DA VOI

Il quesito del mese

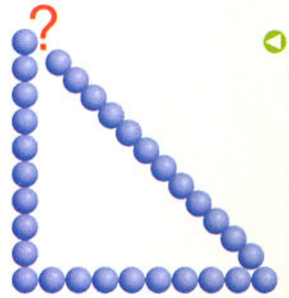
Verificate, servendovi di numeri-punti, che la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2.

La soluzione di novembre

Il limite superiore per ciascun angolo è 180°, pertanto il limite superiore per la somma dei tre angoli è 180°x3=540°.

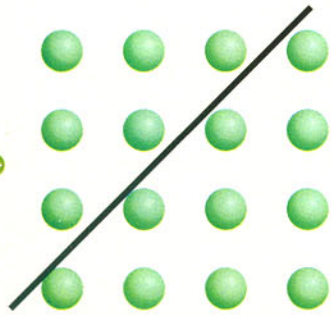


10, per i pitagorici, era un numero triangolare.

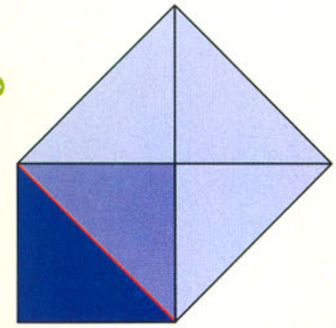


Se nel lato del quadrato entra un numero esatto di sassolini (per esempio 10), la diagonale avrà una lunghezza impossibile da riempire con un numero intero di sassolini per quanto piccoli si scelgano.

La somma di due numeri triangolari consecutivi è sempre un numero quadrato. Per esempio 6+10=16.



La diagonale di un quadrato è il lato del quadrato di area doppia di quello dato.



sero. E se costruivano un quadrato avente per lato un numero qualsiasi di sassolini, nella diagonale non ne entrava mai un numero intero! Per esempio, se il lato era 10, nella diagonale ce ne stavano 14, e rimaneva un po' di spazio vuoto, ma un altro sassolino intero non vi trovava posto. E questo valeva per tutti i quadrati, qualunque fossero le dimensioni e il numero dei sassolini.

Per esserne certo Pitagora inventò un tipo di ragionamento, chiamato «dimostrazione per assurdo», che ancor oggi viene comunemente riportata nei testi, basata sulla differenza tra numeri pari e numeri dispari [*vedi box qui a fianco*].

Una scoperta da tacere

La scoperta dell'esistenza di triangoli rettangoli con i lati e la diagonale incommensurabili tra loro, cioé non rappresentabili come somma di un numero finito di sassolini della stessa dimensione, fu per i Pitagorici veramente drammatica. Ne troviamo testimonianza in autori successivi, come Platone, che la ricorda in uno dei suoi Dialoghi: *Menone*, che ha come protagonisti Socrate, Menone e Anito. «Eppure la diagonale esiste», dice Socrate, «ed è il lato del quadrato di area doppia [*vedi figura qui sopra a destra*]. È dunque possibile che una grandezza esista, ma non esista la sua misura?».

Questa era la drammatica domanda che si posero i Pitagorici e che tennero segreta, così si racconta, perché contraddiceva il loro sistema filosofico secondo il quale a tutto ciò che esiste si può attribuire un numero. E Ippaso di Metaponto, il discepolo che osò divulgarla, trovò la morte in mare per mano degli Dei... Questo fu l'inizio di un lungo processo che porterà filosofi e matematici a confrontarsi sull'infinitamente piccolo e a formulare un'idea più evoluta di punto: il segmento e tutte le altre figure geometriche devono essere pensate non come tante unità messe una accanto all'altra (i sassolini di Pitagora), ma come un continuo. Il punto è privo di dimensione e tra due punti comunque vicini ne esiste sempre un altro. Della diagonale del quadrato si potranno calcolare solo i valori per difetto o per eccesso, che saranno tanto più vicini alla misura vera quante più cifre decimali avranno. Se il lato del quadrato è uguale a 1, i valori per difetto saranno 1; 1,4; 1,41; 1,414;..., mentre quelli per eccesso saranno 2; 1,5; 1,42; 1,415...; si otterranno così due successioni infinite di numeri razionali, rappresentate sinteticamente con il noto simbolo $\sqrt{2}$, numero appartenente all'insieme dei reali irrazionali, che solo alla fine del XIX secolo, per opera di grandi matematici come Dedekind, Cantor e Weierstrass, ebbero la definitiva sistemazione teorica. N

PER APPROFONDIRE

Ecco la dimostrazione per assurdo di Pitagora:

Supponiamo che sia il lato sia la diagonale di un quadrato contengano un numero intero di sassolini, rispettivamente n e m. Supponiamo anche che questi siano il minimo numero possibile, cioè che n e m non si possano dividere per uno stesso numero. Se, per esempio, inizialmente fossero 10 e 15 si potrebbero ridurre a 2 e 3 dividendo per 5, ottenendo un quadrato più piccolo, ma simile al dato, come sono d'altra parte tutti i quadrati. Da ciò deriva che m e n non possono essere ambedue pari. Applicando allora il famoso teorema si otterrebbe $n^2+n^2=m^2$ cioè $2n^2=m^2$. Ma questa uguaglianza non può esistere: infatti il numero m^2, essendo uguale a n^2 moltiplicato per 2, sarebbe pari, e poiché è un quadrato sarebbe divisibile non solo per due, ma per 4. Allora l'uguaglianza potrebbe essere scritta in questo modo: $2n^2=4k^2$, che, dividendo per 2, diverrebbe $n^2=2k^2$; anche n, allora, risulterebbe pari, cosa che si è esclusa all'inizio. Dunque, poiché il ragionamento è corretto, ma la conclusione va contro l'ipotesi, l'ipotesi stessa deve essere sbagliata, cioè che il lato e la diagonale del quadrato contengano numeri interi di sassolini... o di punti.

**Silvana Leggerini ha insegnato matematica e fisica nei licei. Collabora con il Museo di Storia naturale di Montebelluna (TV).*